3 Dinamica punctului material

3.1. Dinamica. Legea I a lui Newton (Legea Inerției)
3.2. Principiul relativității Galileene
3.3. Legea a doua a lui Newton (Legea fundamentală a dinamicii)
3.4. Impulsul corpurilor
3.5. Legea a III-a a lui Newton (Legea acțiunilor reciproce)
3.6. Lucru mecanic
3.7. Puterea
3.8. Energia
3.9. Legea de conservare a energiei
3.10. Legea de conservare a impulsului
3.11. Momentul forței
3.12. Momentul cinetic
3.13. Legea de conservare a momentului cinetic
3.14. Momentul de inerție

3.1 Dinamica. Principiul I al dinamicii (Legea Inerției)

Definiție: Dinamica este partea mecanicii care studiază mişcarea corpurilor materiale şi cauzele fizice care produc sau schimbă mişcarea. În dinamică se stabilesc legile mişcării corpurilor pe baza interacțiunilor dintre ele.

Aristotel (384-322) susținea că pentru a menține corpurile în mişcare uniformă şi rectilinie trebuie să se acționeze permanent asupra lor cu alte corpuri. Galileo Galilei[1] (1564- 1642) a observat că nu există corpuri care să nu fie influențate de alte corpuri. Aşa a ajuns la concluzia că pentru a

[1] Galileo Galilei (1564-1642) fizician şi astronom Italian, pionier a revoluției ştiințifice care a precedat lucrările lui Isaac Newton. Principala sa contribuție în astronomie a fost folosirea telescopului pentru observarea şi descoperirea munților şi văilor lunare, a patru dintre cei mai mari sateliți a lui Jupiter şi a fazelor lui Venus precum şi a petelor solare. în fizică a descoperit legile care guvernează căderea corpurilor, şi a studiat balistica proiectilelor.

menține corpurile în mişcare rectilinie şi uniformă este suficient de a îndepărta toate influențele exterioare exercitate asupra lor de către alte corpuri.

Enunțul Principiului Inerției:

Orice corp îşi păstrează starea de repaus relativ sau de mişcare rectilinie uniformă în care se găseşte atâta timp cât asupra lui nu acționează alte corpuri care să-i schimbe această stare.

Definiție: Forța este o mărime fizică vectorială care caracterizează interacțiunea dintre corpuri.

Forța poate să aibă asupra corpurilor următoarele efecte:

- Modificarea vitezei.
- Modificarea formei sau dimensiunilor corpurilor.

Câteva tipuri principale de forțe:

- Forțe elastice.
- Forțe de frecare.
- Forțe gravitaționale.
- Forțe de legătură.
- Forțe de „inerție”.

Enunțul realist al Principiului Inerției:

Dacă rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra unui corp este nulă atunci corpul îşi păstrează la nesfârşit starea de repaus relativ sau de mişcare rectilinie şi uniformă în care se găseşte.

*Definiție: Proprietatea corpurilor libere de a se mişca de la sine uniform şi rectiliniu, timp infinit, se numeşte **INERȚIE**.*

Definiție: Mărimea fizică care caracterizează cantitativ inerția corpurilor, fiind proporțională cu cantitatea de substanță conținută în corp se numeşte ***masa*** *(inerțială).*

3.2 Principiul relativității Galileene

Definiție: Sistemele de referință în care este valabilă legea inerției se numesc ***sisteme de referința inerțiale*** *(SRI).*

Afirmație: Orice sistem de referință aflat în repaus sau în mişcare rectilinie şi uniformă față de un sistem inerțial este şi el inerțial.

Afirmații:

- Ecuațiile de mişcare au aceeaşi formă în toate SRI. Orice experiență fizică se desfăşoară identic în toate SRI.
- Nu există sisteme de referință privilegiate; toate sunt echivalente.
- Legile mecanicii sunt egal valabile în toate sistemele de referință inerțiale.(Principiul relativității Galileene)

Transformările Galileene

Fie două sisteme de referință inerțiale. Sistemul SRI' se deplasează cu viteza v față de sistemul de referință SRI. Timpul se scurge uniform în toate sistemele de referință. Atunci **transformările Galileene** se scriu ca:

$$\begin{cases} x = x' + v \cdot t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad \text{şi invers} \quad : \begin{cases} x' = x - v \cdot t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}, \tag{3.1}$$

În mecanica Newtoniană lungimile măsurate în SRI diferite sunt egale:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - v \cdot t \\ x_2' = x_2 - v \cdot t \end{cases}, \tag{3.2}$$

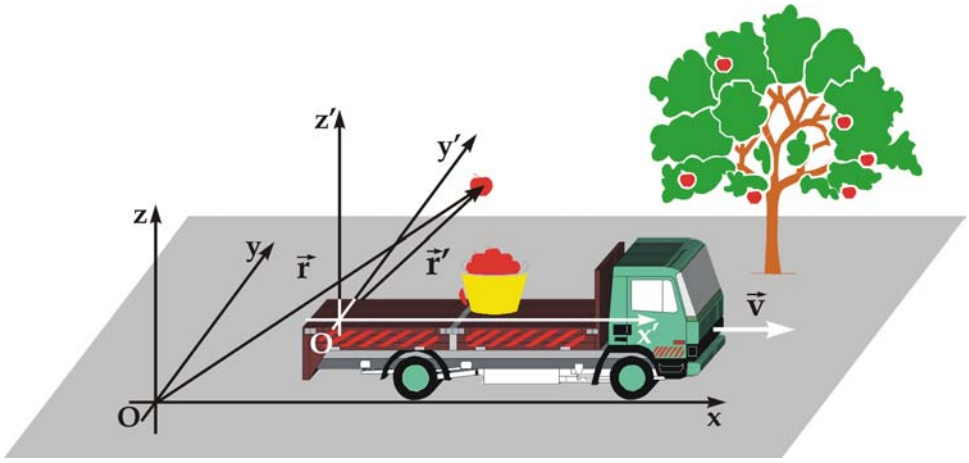

Fig. 3.1 Sistemul de referinţă inerţial SRI' se mişcă cu viteza de transport v fata de sistemul de referinţă SRI.

Lungimile măsurate în ambele sisteme de referinţă sunt egale:

$$l' = x_2' - x_1' = x_2 - v \cdot t - x_1 + v \cdot t = x_2 - x_1 = l\,. \qquad (3.3)$$

Componentele vitezei măsurate în sistemul de referinţă mobil, SRI' sunt legate de componentele vitezei măsurate în sistemul de referinţă fix, SRI şi de viteza de transport prin relaţiile:

$$\begin{cases} v_x' = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{d(x - v \cdot t)}{dt} = \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d(v \cdot t)}{dt} = v_x + v \\ v_y' = \dfrac{dy'}{dt'} = v_y \\ v_z' = \dfrac{dz'}{dt'} = v_z \end{cases} . \qquad (3.4)$$

In ambele sisteme de referinţă inerţiale acceleraţia este aceeaşi:

$$\begin{cases} a_x' = \dfrac{dv_x'}{dt'} = \dfrac{d(v_x + v)}{dt} = \dfrac{dv_x}{dt} + \dfrac{dv}{dt} = a_x \\ a_y' = \dfrac{dv_y'}{dt'} = a_y \\ a_z' = \dfrac{dv_z'}{dt'} = a_z \end{cases} . \qquad (3.5)$$

3.3 Legea a doua a lui Newton (Legea fundamentală a dinamicii)

Definiție: Forța care acționează asupra unui corp este egală cu produsul dintre masa corpului şi accelerația imprimată de acea forță.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \,. \tag{3.6}$$

Sau dacă sunt mai multe forțe atunci fiecare produce propria accelerație:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \,. \tag{3.7}$$

3.4 Impulsul corpurilor

O altă formă a legii fundamentale se poate obține pornind de la:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(m \cdot \vec{v}\right)}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \,, \tag{3.8}$$

unde s-a introdus mărimea:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \,. \tag{3.9}$$

Definiție: Mărimea fizică care caracterizează mişcarea din punct de vedere dinamic, egală numeric cu produsul dintre masa şi viteza corpului se numeşte ***impulsul corpului*** *(sau cantitate de mişcare).*

Deci legea a doua a dinamicii este:

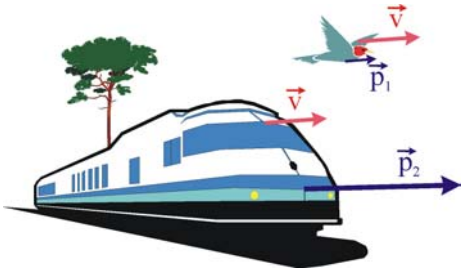

Fig. 3.2 Două corpuri care se deplasează cu aceeaşi viteză au impulsuri diferite, iar la ciocnire (variația în timp) forțe diferite.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \,. \tag{3.10}$$

Forța care acționează asupra unui corp este o mărime fizică vectorială egală numeric cu variația impulsului în unitatea de timp.

Impulsul Forței

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int_{p1}^{p2} d\vec{p} = \int_{t1}^{t2} \vec{F} \cdot dt \quad \Rightarrow$$
$$\Delta p = p2 - p1 = \int_{t1}^{t2} \vec{F} \cdot dt \qquad (3.11)$$

Definiție: ***Impulsul forței*** *într-un interval de timp Δt = t2 – t1 este egal cu variația impulsului corpului în acelaşi interval de timp.*

3.5 Legea a III-a a lui Newton (Legea acțiunilor reciproce)

În natură nu există acțiuni unilaterale, numai din partea unui corp asupra altuia. Acțiunile corpurilor unele asupra celorlalte sunt reciproce.

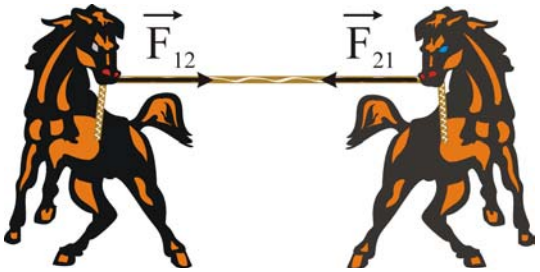

Fig. 3.3 Ilustrarea principiului acțiunii şi reacțiunii.

Enunț: Forțele cu care două corpuri acționează unul asupra celuilalt sunt orientate în lungul aceleiaşi drepte, sunt egale în mărime şi au sensuri opuse.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \qquad (3.12)$$

3.6 Lucru mecanic

Lucrul mecanic al forțelor constante

Definiție: ***Lucrul mecanic*** *al forței constante este egal cu produsul scalar dintre vectorul forța şi vectorul deplasare al punctului de aplicație al forței.*

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\alpha, \qquad (3.13)$$

unde α este unghiul dintre forță şi deplasarea produsă de aceea forță.

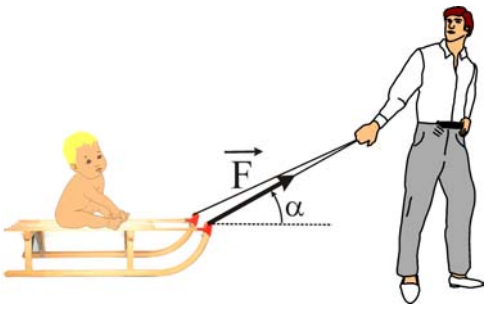

Fig. 3.4 În general forța care acționează asupra corpurilor poate sa nu fie orientată în direcția deplasării acestora.

Se pot distinge două cazuri:

1. Forța este orientată în direcția deplasării, $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \,. \qquad (3.15)$$

2. Forța nu este orientată în direcția deplasării, $\alpha \neq 0$:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot cos\,\alpha = F\,cos\,\alpha \cdot s = F_s \cdot s \,. \qquad (3.16)$$

Lucrul mecanic este egal cu produsul dintre componenta forței pe direcția deplasării şi deplasarea produsă de această componentă. Componenta forței normală (perpendiculară) pe direcția deplasării nu produce lucru mecanic. Dacă unghiul $\alpha > 90^0$, $\cos\alpha < 0$ lucru mecanic este negativ. Lucrul mecanic efectuat de o forță $\vec{F}$ în absența frecării nu depinde de drumul pe care se deplasează corpul.

Dimensiunea şi unitatea de măsură a lucrului mecanic[2]:

$$[L] = [F] \cdot [s] = N \cdot m = J$$
$$[L] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \,. \qquad (3.14)$$

Lucrul mecanic al forțelor variabile

Pentru calculul lucrului mecanic efectuat de forța $\vec{F}(s)$ când punctul ei de aplicație se deplasează de la A la B împărțim deplasarea totală $\vec{s}$ în intervale infinit mici, $d\vec{s}$ pentru care se poate considera forța constantă. Atunci lucrul mecanic elementar este:

[2] **James Prescott Joule**: Fizician englez, James Joule este cunoscut pentru lucrările sale în domeniul electricității şi termodinamicii (studiul căldurii). Joule a descoperit relația dintre curentul electric, rezistența electrică şi căldura produsă de circuitele electrice. Unitatea de măsura în sistemul internațional este joule (J), numită după James Joule.

$$\begin{aligned} dL = \vec{F}(s)\cdot d\vec{s} \quad &\Rightarrow \quad \int_A^B dL = \int_A^B \vec{F}(s)\cdot d\vec{s} \\ L_{AB} &= \int_A^B \vec{F}(s)\cdot d\vec{s} \end{aligned} . \tag{3.17}$$

Definiție: Lucrul mecanic al forțelor variabile cu deplasarea este egal cu integrala forței în raport cu spațiul parcurs.

3.7 Puterea

De multe ori ne interesează nu numai valoare lucrului mecanic efectuat de cineva sau de ceva ci şi timpul în care a fost efectuat lucrul dat.

$$P = \frac{dL}{dt} . \tag{3.18}$$

Definiție: Puterea este viteza de producere a lucrului mecanic, sau viteza de variație a energiei cinetice în unitatea de timp.

Dacă forța care produce lucrul mecanic este constantă în timp atunci:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d(F\cdot s)}{dt} = F\cdot\frac{d(s)}{dt} = F\cdot v . \tag{3.19}$$

Puterea instantanee a unui agent care lucrează cu forță constantă este egala cu produsul dintre forța şi viteza instantanee a punctului sau de aplicație.

Unitatea de măsură şi dimensiunea[3].

$$\begin{aligned} [P] &= \frac{[L]}{[t]} = \frac{j}{s} = 1W \\ [P] &= ML^2T^{-3} \end{aligned} . \tag{3.20}$$

Wattul este puterea unui agent care produce un lucru mecanic egal cu 1 Joule în fiecare secundă. Din ecuația (3.16) se deduce lucrul mecanic în funcție de putere:

[3] **James Watt (1736-1819),** inventator scoțian a adus importante îmbunătățiri motorului cu aburi, făcându-l practic pentru uzul la scala industrială.

$$L = P \cdot t . \qquad (3.21)$$

3.8 Energia

La baza definiției energiei stă faptul că numai acele corpuri sau sisteme fizice pot efectua lucru mecanic, care au energie. Atunci când corpurile sau sistemele fizice efectuează lucru mecanic energia lor scade.

Definiție: Energia este o stare a corpurilor sau sistemelor fizice în care acestea au posibilitatea de a efectua lucru mecanic.

Lucru mecanic efectuat de un corp este variația energiei lui, în timp ce energia pe care o posedă un corp este o măsură a lucrului mecanic efectuat asupra lui. Energia este o mărime fizică de stare în timp ce lucrul mecanic este o mărime fizică de proces. Exista două tipuri de energie mecanică, după cum este starea corpurilor **statică** sau **dinamică**. Adică energia poate sa fie potențială sau energia de poziție şi cinetică sau energia de mişcare.

Definiție: Energia potențială sau de poziție este capacitatea unui corp sau sistem fizic de-a efectua lucru mecanic ca urmare a poziției lui față de Pământ sau ca urmare a poziției relative a părților sale componente.

Definiție: Energia cinetică sau de mişcare este capacitatea unui corp sau sistem fizic de-a efectua lucru mecanic ca urmare a stării de mişcare în care se găseşte.

Energia potențială

$$L_d = G \cdot h = mgh . \qquad (3.22)$$

Lucrul mecanic de ridicare este energia înmagazinata în corpul poziționat la înălțimea *h*.

$$E_p = L_d = m \cdot g \cdot h . \qquad (3.23)$$

Energia cinetică

Dacă deplasarea corpului este pe orizontală şi se efectuează fără frecare atunci întreg lucru mecanic este folosit pentru accelerarea corpului.

$$L_o = F \cdot s = m \cdot a \cdot s = m \cdot \frac{v^2}{2s} \cdot s = m \cdot \frac{v^2}{2}. \qquad (3.24)$$

Definiţie: Energia unui corp în mişcarea de translaţie este egală cu jumătatea produsului dintre masa corpului şi pătratul vitezei.

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}. \qquad (3.25)$$

3.9 Legea de conservare a energiei

Teorema de variaţie a energiei cinetice

Presupunem că un corp are viteza v_1 la un moment t_1 când începe acţiunea forţei de accelerare $\vec{F}_a$ şi viteza v_2 la un moment t_2. Lucrul mecanic efectuat în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ este:

$$L_a = F_a \cdot s = ma \cdot s = m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_{c2} - E_{c1}. \qquad (3.26)$$

Variaţia energiei cinetice a unui corp este egală cu lucrul mecanic al forţei de accelerare care a acţionat asupra lui în timpul acestei variaţii.

Energia mecanică totală

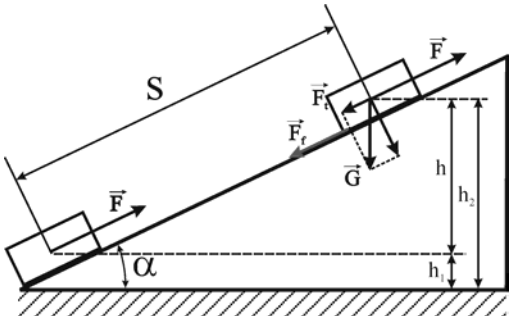

Fig. 3.5 Ilustrarea legii de conservare a energiei.

Se aplică asupra unui corp de masă ***m*** o forţa F pentru a-l urca pe planul înclinat de la înălţimea h_1 la înălţimea h_2. Deşi asupra corpului se aplică expres numai forţa F asupra lui mai

acționează forța tangențială, F_t şi forța de frecare, F_f (pe durata mişcării). Pentru ca mişcarea sa să fie accelerată trebuie ca rezultanta forțelor să fie diferită de zero:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F} + \vec{F}_t + \vec{F}_f \neq 0 \\ R &= F - F_t - F_f > 0 \end{aligned} . \tag{3.27}$$

Din teorema variației energiei cinetice avem:

$$L = R \cdot s = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \tag{3.28}$$

sau dacă introducem ecuația (3.19) în (3.20) obținem:

$$F \cdot s = F_t \cdot s + F_f \cdot s + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{3.29}$$

Forța de frecare este proporțională cu forța normală de apăsare a corpului asupra planului înclinat:

$$F_f = \mu \cdot N = \mu \cdot G_n = \mu \cdot mg\, cos\, \alpha, \tag{3.30}$$

unde μ este coeficientul de frecare şi depinde de suprafețele corpului şi planului înclinat.

Forța tangențială este:

$$F_t = G_t = mg\, sin\, \alpha. \tag{3.31}$$

De unde lucrul mecanic al forței de tracțiune F este:

$$\begin{aligned} F \cdot s &= mg\, sin\, \alpha \cdot s + \mu \cdot mg\, cos\, \alpha \cdot s + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \\ F \cdot s &= mgh + \mu \cdot G_t s + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = mg(h_2 - h_1) + \mu \cdot G_t s + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \\ F \cdot s &= \mu \cdot G_t s + \left[\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 \right] - \left[\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 \right] \end{aligned}, \tag{3.32}$$

unde expresia:

$$E_t = \frac{mv^2}{2} + mgh, \tag{3.33}$$

este energia totală.

Energia totală a unui corp în mişcarea de translaţie este egală cu suma energiei potenţiale şi cinetice a corpului.

$$L = Q_f + E_{t2} - E_{t1}. \tag{3.34}$$

Lucrul mecanic efectuat de o forţa aplicată, F, asupra unui corp este egal cu variaţia energiei totale a corpului plus energia calorică disipată prin frecare.

Legea conservării energiei cinetice

Enunţ: În procesele mecanice fără frecare, izolate fizic, energiile cinetice şi potenţiale se pot transforma reciproc una în alta dar suma lor rămâne constantă.

$$\begin{aligned} &L = (Q_f = 0) + E_{t2} - E_{t1} = 0 \quad \Rightarrow \\ &E_{t2} = E_{t1} = \text{const} \end{aligned}, \tag{3.35}$$

sau

$$E_t = \frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}. \tag{3.36}$$

3.10 Legea de conservare a impulsului

În tratarea dinamică a unui sistem de particule constatăm ca este util să facem distincţie dintre forţele externe şi forţele interne. Să considerăm un sistem pentru care rezultanta forţelor externe este zero. Atunci din legea a II-a a dinamicii rezultă:

$$\begin{aligned} &\vec{R} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{p} = 0 \quad \Rightarrow \\ &\qquad\qquad \vec{p} = \text{const} \end{aligned}. \tag{3.37}$$

Să considerăm acum un sistem de puncte materiale izolat supus numai acţiunii forţelor interne. Impulsul acestui sistem este egal cu:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \,, \tag{3.38}$$

dacă dorim să calculăm variația impulsului în raport cu timpul:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d(\vec{v}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{3.30}$$

Într-un sistem de particule care acționează una asupra celeilalte conform principiului III al dinamicii (al acțiunii şi reacțiunii) pentru fiecare forța $\vec{F}_i$ exista o altă forță $\vec{F}_j$ pentru care $\vec{F}_i = -\vec{F}_j$. Atunci suma forțelor este:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j\right] = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left(\vec{F}_i + \vec{F}_j\right) = 0 \tag{3.40}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \quad d\vec{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{const}$$

Forțele interne nu sunt capabile să modifice impulsul total al sistemului de particule.

Enunț: Impulsul total al unui sistem de particule izolat (rezultanta forțelor externe este zero) se conservă.

3.11 Momentul forței

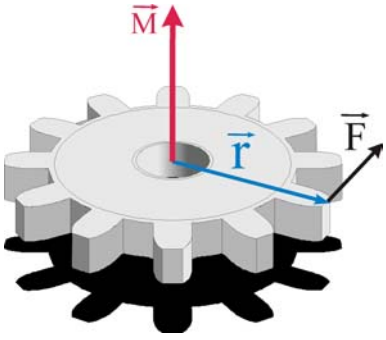

Fig. 3.6 Definirea momentului forței.

Fie o forță F care acționează asupra unui corp rigid care se poate roti în jurul unei axe. Se constată ca efectul de rotație este direct proporțional cu valoarea forței F şi cu distanta r de la axa de rotație până la punctul de aplicare al forței.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \,, \tag{3.41}$$

unde ***r*** este brațul forței.

Definiție: Mărimea fizică care caracterizează efectul de rotație al unei forte, aplicată unui corp rigid, se numeşte moment al forței față de un punct în care este fixat corpul.

Vectorul moment al unei forțe față de un punct este perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{r}$ şi $\vec{F}$, în sensul dat de regula burghiului.

3.12 Momentul cinetic

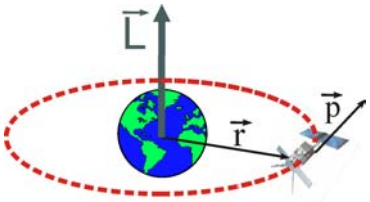

Fig. 3.7 Ilustrarea momentului cinetic.

Prin analiza mişcării unui punct material care se mişcă pe o traiectorie curbilinie, în raport cu o axă ce intersectează planul mişcării se poate introduce o mărime fizică numită moment cinetic.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\,. \tag{3.42}$$

3.13 Legea de conservare a momentului cinetic

Teorema variației momentului cinetic

Considerăm o modificare infinitezimală a momentului cinetic într-un timp infinit scurt, atunci:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\times\vec{p} + \vec{r}\times\vec{F} \\ &= \vec{v}\times(m\vec{v}) + \vec{r}\times\vec{F} = m(\vec{v}\times\vec{v}) + \vec{r}\times\vec{F} \\ \Rightarrow\quad \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M} \end{aligned} \quad . \tag{3.43}$$

Momentul forței este egal cu derivata în timp a momentului cinetic.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}\,. \tag{3.44}$$

Dacă momentul forţei se anulează atunci prin integrare se găseşte ca momentul cinetic se conservă.

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const.} \tag{3.45}$$

Cazuri în care momentul forței $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ se anulează sunt:

1. $\vec{F} = 0$ forța se anulează.
2. $\vec{r} = 0$ direcția forței trece prin punctul axa de rotație.
3. $\vec{F} \,||\, \vec{r}$ forța şi brațul forței sunt paralele. (Forte de tip central).

3.14 Momentul de inerție

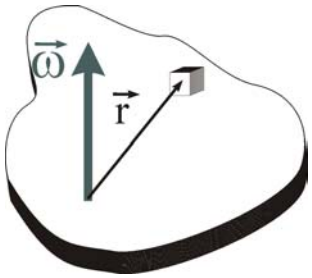

Fig. 3.8 O placă subțire care se poate roti în jurul axei z.

Considerăm o placă subțire dea lungul căreia avem o distribuție de masă. Placa se găseşte în planul xy şi se poate roti în jurul axei z. Elementul de masă m_i se mişcă cu viteza;

$$\vec{v}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i . \tag{3.46}$$

Dacă corpul este rigid atunci vitezele unghiulare sunt aceleaşi indiferent de poziția elementului de masă:

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega} \quad i = 1,2,\ldots n , \tag{3.47}$$

deci:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i . \tag{3.48}$$

În mişcarea circulară viteza este perpendiculară pe rază, deci:

$$v_i = r_i \cdot \omega . \tag{3.49}$$

Energia cinetica a plăcii este atunci:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 , \tag{3.50}$$

unde s-a definit mărimea I_z ca fiind momentul de inerție al plăcii în raport cu axa z.

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i r_i^2 \right), \tag{3.51}$$

sau sub forma integrală:

$$I = \oint_V r^2 dm = \oint_V r^2 \rho(r) dV . \tag{3.52}$$

Teorema axelor paralele

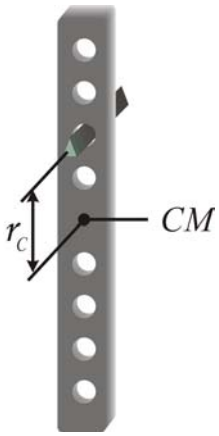

Fig. 3.9 Pendulul fizic.

Să considerăm un punct special pentru care:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{ci} = 0 . \tag{3.53}$$

şi care se numeşte **centru de masă**.

Atunci poziția elementului de masă față de axa de rotație poate fi scrisă în funcție de poziția elementului de masă față de centrul de masă şi poziția axei de rotație față de centru de masă:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ci} . \tag{3.54}$$

Momentul de inerție este:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{r}_c + \vec{r}_{ci} \right) \cdot \left(\vec{r}_c + \vec{r}_{ci} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_c^2 + 2\vec{r}_c \vec{r}_{ci} + r_{ci}^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i r_c^2 + 2\vec{r}_c \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{ci} + \sum_{i=1}^{n} m_i r_{ci}^2 , \\ &= r_c^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + 0 + I_{cz} \end{aligned} \tag{3.55}$$

de unde:

$$I_z = I_{cz} + r_c^2 M . \tag{3.56}$$

Enunț: Momentul de inerție în raport cu orice axa este egal cu momentul de inerție în raport cu o axă paralelă care trece prin centrul de

masa plus masa întregului corp înmulțită cu pătratul distanței dintre cele două axe.

$$I = I_c + Ml^2, \tag{3.57}$$

unde l este distanța dintre axe.

Energia cinetică devine în acest caz:

$$E_c = \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2 + \frac{1}{2} M r_c^2 \omega^2 . \tag{3.58}$$

Energia totală a plăcii în rotație este compusă din energia datorată rotației în jurul centrului de masă plus energia legată de mișcarea de translație a centrului de masă în raport cu axa de rotație.

Teorema axelor perpendiculare

Să considerăm acum rotații în jurul axei x. Momentul de inerție este:

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 , \tag{3.59}$$

în mod similar momentul de inerție în jurul axei y:

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 . \tag{3.60}$$

Suma celor două momente de inerție este:

$$I_x + I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = I_z . \tag{3.61}$$

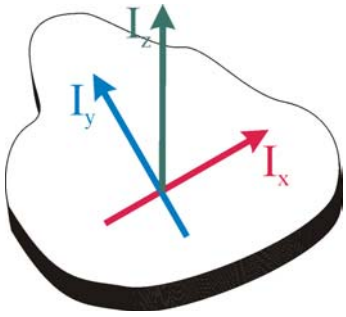

Fig. 3.10 Teorema axelor perpendiculare.

Momentul de inerție al unui foi plane rigide în raport cu o axă normală la planul ei este egal cu suma momentelor de inerție în raport cu două axe perpendiculare arbitrare care se află în plan şi intersectează axa normală.