5. Oscilațiile punctului material

5.1. Mişcarea oscilatorie
5.2. Factori care determina mişcarea oscilatorie
5.3. Ecuația mişcării oscilatorii armonice
5.4. Mărimii caracteristice mişcării de oscilație
5.5. Viteza şi accelerația în mişcarea oscilatorie armonica
5.6. Energia oscilatorului armonic
5.7. Oscilații amortizate
5.8. Oscilații forțate (întreținute). Rezonanta
5.9. Compunerea oscilațiilor

5.1. Mişcarea oscilatorie

In natură şi tehnică se întâlnesc procese repetabile în timp care stau la baza oscilațiilor de diferite feluri.

Fig. 5. 1 Exemple de mişcări periodice.

Caracteristici ale mişcării oscilatorii:

- Existenta unei poziții de echilibru
- Mişcarea se efectuează în ambele sensuri, în jurul poziției de echilibru.
- Traiectoria mişcării are două extreme.
- In aceste poziții extreme viteza corpurilor este nulă.

Definiție: Un corp solid sau lichid care se mişcă în ambele sensuri pe aceeaşi traiectorie, execută o mişcare de ***oscilație mecanică****.*

Definiție: Mişcarea unui corp care se repetă la intervale egale de timp şi se execută simetric față de poziția de echilibru se numeşte ***mişcare oscilatorie periodică****.*

Definiție: Sistemele care efectuează mișcările descrise mai sus se numesc ***oscilatori****.*

5.2. Factori care determina mişcarea oscilatorie

Energia inițială suplimentară, care este necesară pentru scoaterea corpului din poziția de echilibru reprezintă primul factor care determină mişcarea de oscilație. Forța care acționează asupra unui corp şi este mereu îndreptata spre poziția de echilibru se numeşte forța elastică de revenire şi este al doilea factor care determina o mişcare oscilatorie.

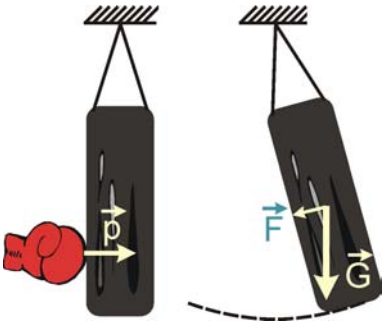

Fig. 5. 2 Impulsul inițial şi apoi forța de revenire conduc la apariția unei mişcări oscilatorii.

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x}\,, \qquad (5.1)$$

unde k este o constantă care caracterizează sistemul oscilator; iar x este depărtarea corpului față de poziția de echilibru şi se numeşte elongație. Dacă asupra corpului care execută o mişcare de oscilație acționează numai o forța de tip elastic atunci această mişcare ideală este numită armonică.

5.3. Ecuația mişcării oscilatorii armonice

Energia potențială este minimă în poziția de echilibru. Dacă notam cu $W_p(x)$ energia potențiala atunci aceasta se poate dezvolta în serie Taylor în jurul poziției de echilibru:

$$W_p(x) = W_p(0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{dW_p(x)}{dx}\right)\Bigg|_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2W_p(x)}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=0} \cdot x^2 + \ldots \qquad (5.2)$$

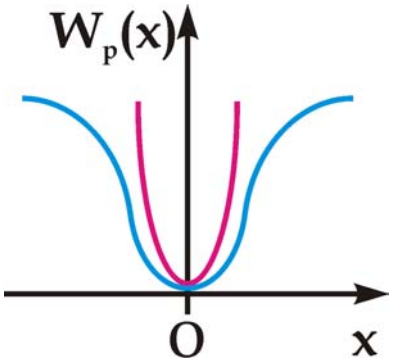

Fig. 5. 3 Energia potențială poate fi în general o curbă oarecare aproximată în jurul lui x = 0 de o parabolă.

Consideram oscilații mici în jurul poziției de echilibru, x = 0. Derivata I-a este zero în această poziție de echilibru iar energia potențială în x = 0 este o constantă pe care o putem considera zero, $W_p = 0$:

$$\left(\frac{dW_p(x)}{dx}\right)\Bigg|_{x=0} = 0\,, \tag{5.3}$$

$$W_p(0) = \text{const} = 0\,, \tag{5.4}$$

expresia energiei potențiale devine:

$$W_p(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2W_p(x)}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=0} \cdot x^2 = \frac{1}{2}k \cdot x^2\,, \tag{5.5}$$

unde k este considerată constanta elastică. Dacă câmpul este conservativ atunci Forța derivă dintr-un potențial (energia potențială):

$$F = -\frac{dW_p(x)}{dx} = -k \cdot x\,, \tag{5.6}$$

care este o forță de tip elastic. Condiția a II–a pentru producerea unei mișcării oscilatorii.

Dacă ținem cont de legea a doua a lui Newton se poate obține ecuația de mișcare:

$$F = m \cdot a = m\frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x\,, \tag{5.7}$$

care prin împărțirea cu masa corpului, ne dă:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x = -\omega_0^2 \cdot x\,, \tag{5.8}$$

unde s-a notat:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\,. \tag{5.9}$$

Se face următoarea convenție în notații:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{şi} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}\,, \tag{5.10}$$

atunci ecuația de mişcare devine:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0\,, \tag{5.11}$$

care este o ecuație diferențială liniară de ordinul doi cu coeficienți constanți. Soluția generală este de forma:

$$x(t) = C_1 e^{i\cdot\omega_0\cdot t} + C_2 e^{-i\cdot\omega_0\cdot t}\,, \tag{5.12}$$

sau sub forma:

$$x(t) = (C_1 + C_2)cos(\omega_0 \cdot t) + (C_1 - C_2)i\,sin(\omega_0 \cdot t), \tag{5.13}$$

unde C_1 şi C_2 sunt două constante de integrare. Putem introduce alte două constante A (amplitudinea) şi φ (faza). Atunci ecuația de mişcare se poate scrie ca:

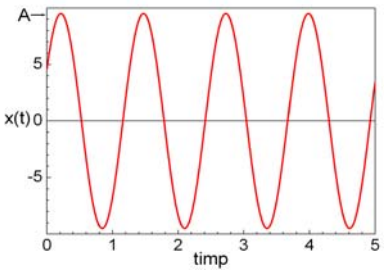

Fig. 5. 4 Reprezentarea grafică a elongației din ecuația 5.14 în funcție de timp.

$$x(t) = A\,sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0), \tag{5.14}$$

care este ecuația mişcării oscilatorii armonice.

$$\begin{aligned} x(t) = {} & A\,sin(\omega_0 \cdot t)\cdot cos(\varphi_0) \\ & + A\,cos(\omega_0 \cdot t)\cdot sin(\varphi_0) \end{aligned}, \tag{5.15}$$

de unde prin identificarea coeficienților din ecuația (5.13) cu ecuația (5.15) obținem:

$$\begin{cases} A\,cos(\varphi_0) = (C_1 - C_2)i \\ A\,sin(\varphi_0) = (C_1 + C_2) \end{cases}, \tag{5.16}$$

de unde:

$$\begin{cases} A = 2\sqrt{C_1 C_2} \\ tg(\varphi_0) = \dfrac{i(C_1 + C_2)}{(C_2 - C_1)} \cdot \end{cases} \tag{5.17}$$

5.4. Mărimii caracteristice mişcării de oscilație

Mişcarea de oscilație este caracterizată de depărtarea momentană sau elongație x(t).

Definiție: ***Elongația*** *x indică depărtarea corpului la un moment dat față de poziția de echilibru.*

Definiție: Deviația maximă a corpului față de poziția de echilibru se numeşte ***amplitudine****.*

Amplitudinea, ***A*** este întotdeauna pozitiva.

Faza mişcării $\varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \varphi_0$ – indică starea şi sensul mişcării la un moment dat. **Faza inițială** este φ_0. Iar ω_0 se numeşte **pulsație** şi are dimensiunea unei viteze unghiulare.

Definiție: Mărimea ***T*** *care caracterizează periodicitatea mişcării de oscilație se numeşte* ***perioadă*** *a oscilației.*

Definiție: ***Perioada de oscilație, T*** *este timpul necesar pentru efectuarea unei oscilații complete.*

Definiție: ***Frecvența*** *de oscilație* $\boldsymbol{\nu}$ *reprezintă numărul de oscilații efectuate în unitatea de timp.*

$$\omega_0 = 2\pi \cdot \nu_0 = 2\pi \cdot \frac{1}{T_0}, \tag{5.18}$$

deci între frecvență şi perioadă exista relația:

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0}, \tag{5.19}$$

unitatea de măsură pentru frecvență este:

$$[\nu_0] = \frac{1}{[T_0]} = \frac{1}{s} = \text{Hz}, \tag{5.20}$$

şi dacă ținem cont şi de ecuația (5.9) obținem perioada de oscilație:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{5.21}$$

5.5. Viteza şi accelerația în mişcarea oscilatorie armonică

Viteza unui punct material aflat în mişcare oscilatorie este dată de:

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0). \tag{5.22}$$

Accelerația unui punct material aflat în mişcare oscilatorie este dată de:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0), \tag{5.23}$$

sau dacă introducem expresia elongației obținem:

$$a(t) = -\omega_0^2 \cdot x(t). \tag{5.24}$$

5.6. Energia oscilatorului armonic

Să considerăm un oscilator ideal. În acest caz energia totală se conservă. Ea este compusă din energie cinetică şi energie potențială de deformare.

$$W = W_c + W_p, \tag{5.25}$$

unde:

Energia potențială este:

$$W_p(t) = k\frac{x(t)^2}{2} = \frac{k \cdot A^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{5.26}$$

Energia cinetică este:

$$W_c(t) = m\frac{v(t)^2}{2} = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{k \cdot A^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{5.27}$$

Energia totală dată de ecuația (5.25) devine:

$$W = W_c + W_p = \frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2}{2}. \qquad (5.28)$$

5.7. Oscilații amortizate

În orice problemă reală intervin însă forțe de rezistență din partea mediului, din partea legaturilor, care conduc la o disipare în timp a energiei sistemului fapt care conduce la amortizarea oscilațiilor. Să consideram un corp care se mişcă cu viteza relativ mică într-un mediu vâscos. Forța de frecare este proporțională cu viteza acestuia:

$$\vec{F}_f = -r \cdot \vec{v} = -r \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = -r \cdot \dot{\vec{x}}. \qquad (5.29)$$

Ecuația de mişcare a punctului material:

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x - r \cdot \dot{x}. \qquad (5.30)$$

Introducând notațiile:

$$2\delta = \frac{r}{m} \quad \text{şi} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad (5.31)$$

de unde ecuația de mişcare este:

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0, \qquad (5.32)$$

care este o ecuație diferențială, omogenă, de gradul al doilea cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică este:

$$\lambda^2 + 2\delta \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0, \qquad (5.33)$$

care are soluția:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \qquad (5.34)$$

de unde soluția generală a ecuației (5.32) este:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-\delta t + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\delta t - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t}$$
$$x(t) = e^{-\delta t}\left[C_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right] \qquad (5.35)$$

Dacă forța de frecare este foarte mare $\delta > \omega_0$ atunci constantele λ_1 şi λ_2 sunt reale, şi nu se mai produce nici o mişcare oscilatorie, amplitudinea scăzând exponențial în timp. Dacă forța de frecare este mai mică $\delta < \omega_0$ soluțiile sunt mărimi complexe, iar în acest caz mişcarea este periodică. Dacă notam:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,, \tag{5.36}$$

atunci ecuația de mişcare devine:

$$x(t) = e^{-\delta t}\left[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right], \tag{5.37}$$

care poate fi rescrisă folosindu-se funcțiile armonice, *sinus* şi *cosinus*:

$$x(t) = e^{-\delta t}\left[(C_1 + C_2)\,cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\,sin(\omega t)\right], \tag{5.38}$$

sau trecând sub forma cunoscută:

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\,sin(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{5.39}$$

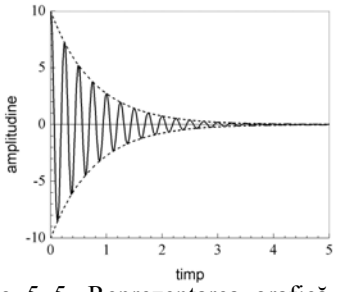

Fig. 5. 5 Reprezentarea grafică a elongației din ecuația 5.39 în funcție de timp. Amplitudinea este şi ea o funcție de timp data de 5-40.

unde se observă că amplitudinea se modifică în timp după ecuația:

$$A(t) = Ae^{-\delta t} \tag{5.40}$$

Perioada acestei mişcări este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\delta^2}{\omega_0^2}}} > T_0 \tag{5.41}$$

Caracteristicile oscilațiilor amortizate:

- **Decrementul logaritmic** al amortizării:

$$\Delta = ln\left[\frac{A(t)}{A(t+T)}\right] = ln\left[\frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta(t+T)}}\right] = ln\left[e^{\delta T}\right] = \delta T\,. \tag{5.42}$$

- **Timpul de relaxare** – este timpul în care amplitudinea scade de ***e*** ori:

$$A(t+\tau)=\frac{A(t)}{e}, \tag{5.43}$$

de unde:

$$Ae^{-\delta(t+\tau)}=\frac{Ae^{-\delta t}}{e}=Ae^{-\delta t-1} \quad \Rightarrow \quad \delta\tau=1, \tag{5.44}$$

iar timpul de relaxare, τ este:

$$\tau=\frac{1}{\delta}. \tag{5.45}$$

- Atenuarea este:

$$Q=\omega_0\tau, \tag{5.46}$$

care este pozitivă ($Q > 0$) pentru o mişcare periodică şi este negativă ($Q < 0$) pentru o mişcare aperiodică.

5.8. Oscilații forțate (întreținute). Rezonanța

Pentru a menține o mişcare oscilatorie cu amplitudine constantă, în cazul prezentei forțelor de frecare, este nevoie să se transmită periodic energie sistemului sub forma unei forțe care să compenseze amortizarea. Ea este de forma:

$$F=F_0\,sin(\omega t), \tag{5.47}$$

mişcarea punctului material este descrisă de ecuația:

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=F_0\,sin(\omega t), \tag{5.48}$$

sau:

$$\ddot{x}+2\delta\cdot\dot{x}+\omega_0^2\cdot x=\frac{F_0}{m}sin(\omega t), \tag{5.49}$$

soluția acestei ecuații diferențiale este suma a doua soluții i) a ecuației omogene şi ii) de forma membrului drept:

$$x=x_1+x_2, \tag{5.50}$$

unde:

$$x_1(t) = Ae^{-\delta t}\, sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t + \varphi_0\right), \tag{5.51}$$

şi:

$$x_2(t) = A\, sin(\omega t + \varphi), \tag{5.52}$$

pentru un timp suficient de lung avem ca şi soluție doar cea de forma termenului drept, pentru că soluția ecuației omogene tinde la zero:

$$x(t) = A\, sin(\omega t + \varphi), \tag{5.53}$$

viteza este:

$$\dot{x}(t) = \omega A\, cos(\omega t + \varphi), \tag{5.54}$$

iar accelerația este:

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\, sin(\omega t + \varphi), \tag{5.55}$$

ecuația de mişcare devine:

$$-\omega^2 A\, sin(\omega t + \varphi) + 2\delta \cdot \omega A\, cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cdot A\, sin(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} sin(\omega t), \tag{5.56}$$

prin dezvoltarea funcțiilor *sinus* şi *cosinus* şi identificarea coeficienților obținem:

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) cos\,\varphi - 2\delta\omega A\, sin\,\varphi = \dfrac{F_0}{m}, \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) sin\,\varphi + 2\delta\omega A\, cos\,\varphi = 0 \end{cases} \tag{5.57}$$

de unde amplitudinea A şi faza φ sunt:

$$\begin{cases} A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \\ tg\varphi = -\dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases} \tag{5.58}$$

Amplitudinea mişcării atinge o valoare maximă pentru pulsația care respectă condiția:

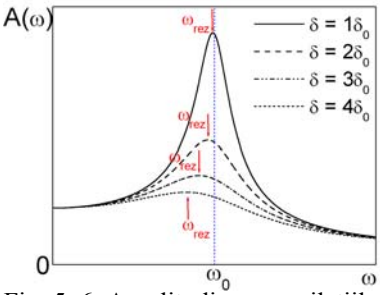

Fig. 5. 6 Amplitudinea oscilațiilor forțate în funcție de pulsația acestora pentru diferite valori δ.

$$\frac{dA}{d\omega}=0, \tag{5.59}$$

de unde:

$$\begin{aligned} -2\omega 2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+8\delta^2\omega=0 \\ \omega\left(\omega_0^2-\omega^2-2\delta^2\right)=0 \end{aligned}, \tag{5.60}$$

care este adevărat pentru ω = 0 adică în absenta forței perturbatoare sau pentru:

$$\begin{aligned} \omega_{rez}^2&=\omega_0^2-2\delta^2 \\ \omega_{rez}&=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}\,. \end{aligned} \tag{5.61}$$

care este frecvența de rezonantă. Amplitudinea devine maximă având valoarea:

$$A_{rez}=\frac{F_0}{m\sqrt{4\delta^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}}=\frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}\,. \tag{5.62}$$

5.9 Compunerea oscilațiilor

De cele mai multe ori corpurile nu sunt supuse unei singure forțe şi care să aibă ca efect o mişcare oscilatorie pură, fie aceasta amortizată sau forțată, având astfel o mişcare mult mai complexă. Când forțele care acționează asupra corpurilor sunt de tip elastic mişcarea rezultată poate fi descrisă prin suprapunerea mişcărilor oscilatorii datorate fiecărei forțe. Acest lucru se numeşte, pe scurt, compunerea oscilațiilor. Există câteva cazuri particulare care la o privire mai atentă pot sta la baza oricărei compuneri arbitrarii a oscilațiilor. Aceste cazuri depind de direcțiile de oscilație relative a două mişcării oscilatorii, şi anume oscilații paralele şi oscilații perpendiculare, sau pot să depindă de frecvența acestor oscilații, conducând la oscilații de aceeaşi frecvență şi de frecvențe diferite.

Compunerea oscilațiilor paralele de frecvențe egale

Să considerăm un punct din spațiu, P în care se suprapun două oscilații armonice paralele, de aceeaşi frecventă, ν descrise de ecuațiile de mişcare:

$$\begin{cases} y_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}, \tag{5.63}$$

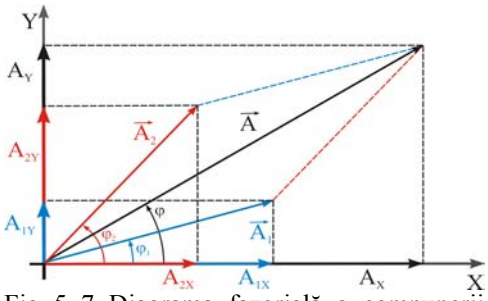

Fig. 5. 7 Diagrama fazorială a compunerii oscilațiilor paralele de aceeaşi frecvență.

unde y_1, A_1, φ_1 sunt elongația, amplitudinea şi respectiv faza inițială a mişcării oscilatorii a punctului P în absenta celei de-a doua oscilații, iar y_2, A_2, φ_2 sunt elongația, amplitudinea şi respectiv faza inițială a mişcării oscilatorii a punctului P în absența primei oscilații. Mişcarea compusă rezultată este:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2), \tag{5.64}$$

este tot o mişcare oscilatorie descrisă de ecuația:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \tag{5.65}$$

Tot ce avem acum de făcut este să determinăm componentele mişcării rezultate, şi anume amplitudinea A_1, şi faza inițială, φ a mişcării. Pentru aceasta, cel mai uşor este să considerăm diagrama fazorială a mişcării, unde mişcarea oscilatorie este considerată ca o proiecție pe o axă, în cazul de fata y a unei mişcări circulare cu raza egală cu amplitudinea, viteza circulară dată de pulsație iar faza inițială fiind chiar unghiul inițial. Amplitudinea se poate calcula uşor folosind ***teorema lui Pitagora generalizată***:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \tag{5.66}$$

iar:

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}, \tag{5.67}$$

faza inițială a acesteia.

Exista doua cazuri particulare interesante care merita menționate. Primul este acela când mişcările sunt în fază $(\varphi_1 = \varphi_2\ ;\ \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0)$, iar amplitudinea este maximă:

$$A = A_1 + A_2, \tag{5.68}$$

şi al doilea caz în care cele două mişcări sunt în antifază $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$ $(\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi)$, iar amplitudinea este minimă:

$$A = A_1 - A_2. \tag{5.68}$$

Compunerea oscilațiilor paralele de amplitudini egale şi frecvențe diferite

Să considerăm un punct din spațiu, P în care se suprapun două oscilații armonice paralele, de aceeaşi amplitudine, A şi frecvențe diferite descrise de ecuațiile de mişcare:

$$\begin{cases} y_1(t) = A\,sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y_2(t) = A\,sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}. \tag{5.69}$$

Ecuația de mişcare rezultată este dată de suma ecuațiilor individuale:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A\sin(\omega_2 t + \varphi_2), \tag{5.70}$$

este tot o mişcare oscilatorie. Dacă se foloseşte o binecunoscuta formulă trigonometrică:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2},$$

ecuația de mişcare devine:

$$y(t)=2A\cos\left(\frac{\omega_1 t+\varphi_1-\omega_2 t-\varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1 t+\varphi_1+\omega_2 t+\varphi_2}{2}\right), \quad (5.71)$$

şi care se mai poate rescrie:

$$y(t)=2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right), \quad (5.72)$$

care este ecuația unei mişcări oscilatorii cu amplitudinea rezultată dependentă de timp:

$$A(t)=2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right), \quad (5.73)$$

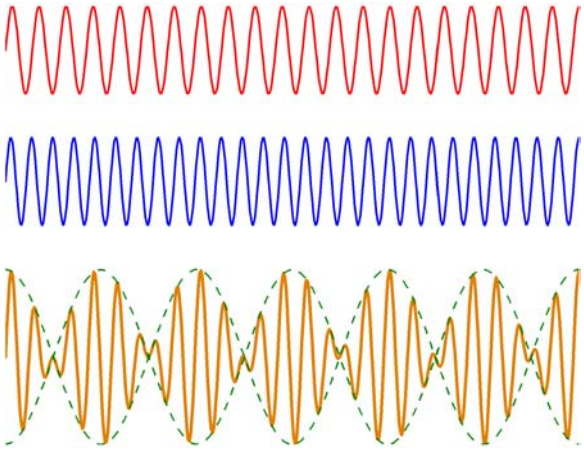

Fig. 5. 8 Compunerea a două oscilații paralele cu amplitudini constante şi de frecvențe diferite conduce la apariția unei oscilații cu amplitudinea modulata cunoscut ca fenomen fizic numit *bătăi*.

şi pulsația determinată de media pulsațiilor celor două oscilații individuale:

$$\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}. \quad (5.74)$$

Pentru uşurință, fără a schimba sensul celor ce urmează se pot considera fazele inițiale a celor două mişcări ca fiind zero:

$$\varphi_1=\varphi_2=0,$$

iar ecuația de mişcare devine

$$y(t)=2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \quad (5.75)$$

Se observa că în cazul în care cele 2 oscilații au aceeaşi pulsație se obține rezultatul discutat la punctul anterior:

$$y(t)=2A\sin(\omega t) \quad (5.76)$$

În cazul general în care pulsațiile celor 2 oscilații diferă $\omega_1 \neq \omega_2$ amplitudinea rezultată trece prin maxime şi minime la diferite momente de timp. Astfel fenomenul de variație periodică a amplitudinii oscilației rezultante poartă numele de ***bătăi***.

Compunerea oscilațiilor perpendiculare de frecventa egală dar amplitudini diferite

Dacă consideram un punct P care efectuează oscilații sub acțiunea simultană a doua forțe elastice perpendiculare. Ecuațiile de mişcare care descriu acum mişcarea corpului sunt date de expresiile:

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_x) \\ y(t) = B\sin(\omega t + \varphi_y) \end{cases}, \tag{5.77}$$

unde A şi B sunt amplitudinile celor 2 mişcării oscilatorii perpendiculare cu fazele, φ_x, şi φ_y. în acest caz scopul nu-l mai reprezintă determinarea ecuației de mişcare, deoarece acestea sunt deja date de ecuația (5.77) ci determinarea traiectoriei punctului material în planul XOY. Pentru aceasta se împart cele două ecuații la amplitudinile corespunzătoare:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{A} = \sin(\omega t + \varphi_x) \\ \dfrac{y}{B} = \sin(\omega t + \varphi_y) = \sin(\omega t + \varphi_x + \varphi_y - \varphi_x) = \sin(\omega t + \varphi_x + \Delta\varphi) \\ \quad = \sin(\omega t + \varphi_x)\cos(\Delta\varphi) + \cos(\omega t + \varphi_x)\sin(\Delta\varphi) \\ \quad = \dfrac{x}{A}\cos(\Delta\varphi) + \cos(\omega t + \varphi_x)\sin(\Delta\varphi) \end{cases}, \tag{5.78}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos(\Delta\varphi) &= \sqrt{1-\sin^2(\omega t + \varphi_x)}\sin(\Delta\varphi)\Big|^2 \\ \frac{x^2}{A^2}\cos^2(\Delta\varphi) + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos(\Delta\varphi) &= \left[1 - \frac{x^2}{A^2}\right]\sin^2(\Delta\varphi) \end{aligned}, \tag{5.79}$$

de unde în final se obține ecuația generală a unei elipse:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos(\Delta\varphi)=\sin^2(\Delta\varphi) \qquad (5.80)$$

Dacă se scompun două oscilații perpendiculare cu frecvențele care satisfac relațiile $\nu_1/\nu_2 = N_1/N_2$ cu N_1 şi N_2 două numere naturale, atunci prin suprapunere iau naştere aşa numitele figuri Lissajous.

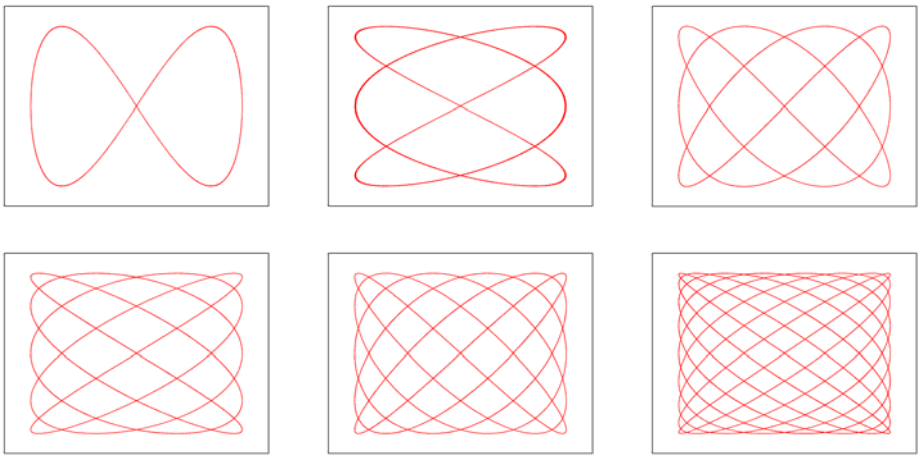

Fig. 5. 9 Figurile Lissajous, obținute din ecuația 5.80 si reprezintă compunerea a două oscilații perpendiculare cu amplitudini diferite şi raportul frecvențelor dat de raportul a doua numere întregi.